Rozšíření MA1 - domácí úkol 4

Diferenciální počet funkcí dvou a tří proměnných 1.

I. Množiny v rovině a definiční obory reálných funkcí dvou proměnných:

1. V rovině načrtněte množiny ($[x,y]$ jsou kartézské souřadnice bodu v rovině) :

a) $M_1 = \left\{ [x,y];\ -2 < x^2 - y < 3 \right\}$;

b) $M_2 = \left\{ [x,y];\ -1 < \dfrac{y}{x+1} \le 1 \right\}$;

c) $M_3 = \left\{ [x,y];\ x^2 + y^2 \le 4 \wedge x + y \ge 0 \right\}$.

Řešení

a) Množina $M_1 = \{[x,y];\ -2 < x^2 - y < 3\}$ je množina bodů X v rovině, jejichž kartézské souřadnice $[x,y]$ splňují podmínky

(1) $\quad -2 < x^2 - y \iff y < x^2 + 2$

a zároveň

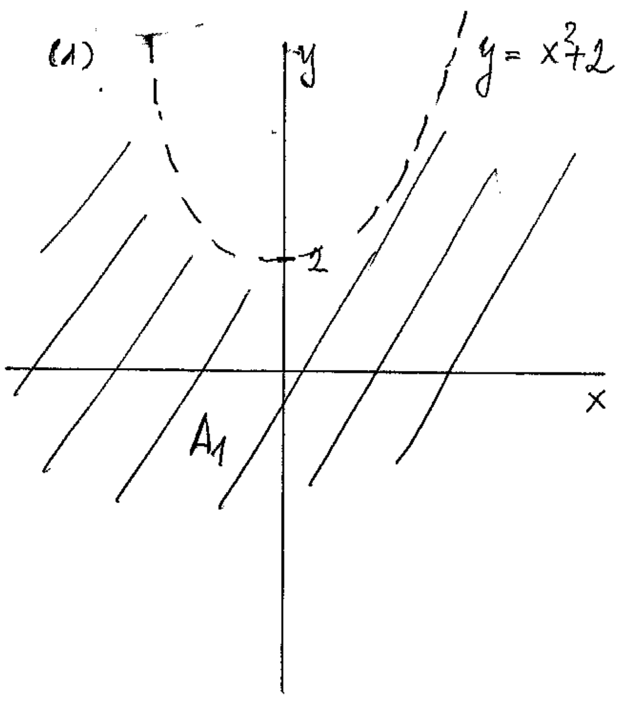
(2) $\quad x^2 - y < 3 \iff x^2 - 3 < y$;

označíme-li $\quad A_1 = \{[x,y] \in R^2;\ y < x^2 + 2\}$ a

$\quad A_2 = \{[x,y] \in R^2;\ x^2 - 3 < y\}$,

pak tedy $M_1 = A_1 \cap A_2$.

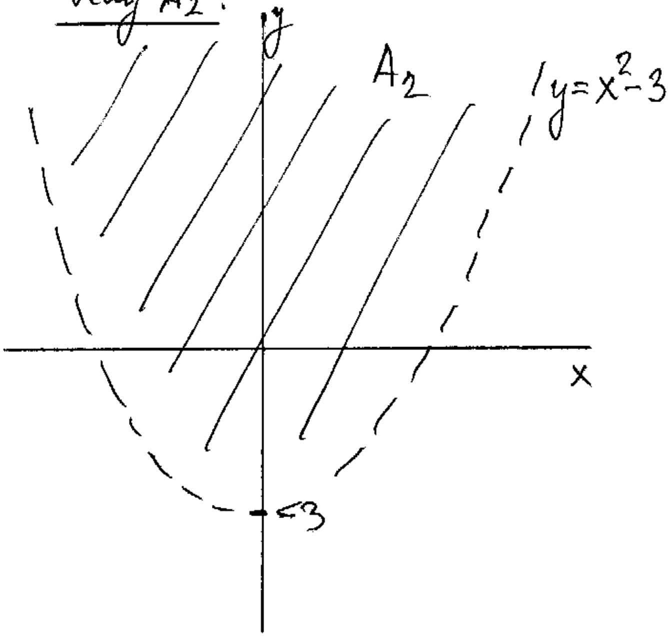
A odtud je „cesta" k náčrtku množiny M_1 :

(1) 

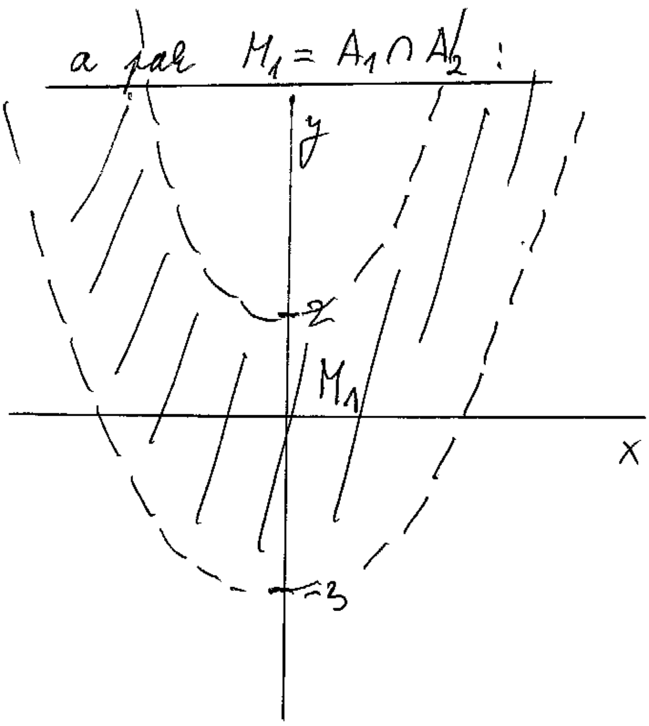
$\boxed{A_1}$: umíme „načrtnout" graf funkce $y = x^2 + 2$, a pro body $[x,y] \in A_1$ je pro zvolené libovolné (a uvažované pevné) $x \in R$ souřadnice y menší, než je souřadnice bodu $[x, x^2+2]$, ležícího na parabole, tedy body z A_1 pro zvolené $x \in R$ leží „pod" bodem $[x, x^2+2]$, tj. body z A_1 leží „pod" parabolou $y = x^2 + 2$.

(2) A_2 : už můžeme asi „rychleji" – načrtneme graf funkce $y = x^2 - 3$ (opět parabola), a protože pro body $[x,y] \in A_2$ je $y > x^2 - 3$, a bod $[x, x^2 - 3]$ je bod paraboly, body z A_2 leží „nad" parabolou $y = x^2 - 3$.

Tedy A_2 :



a pak $M_1 = A_1 \cap A_2$:



b) $M_2 = \{ [x,y] \, ; \, -1 < \frac{y}{x+1} \leqq 1 \}$:

je-li bod X bodem množiny M_2 (tj. $X \in M_2$) a $X [x,y]$, pak (1) $x + 1 \neq 0 \iff x \neq -1$

a (2) platí $-1 < \frac{y}{x+1} \leqq 1$;

a z (2) dostaneme:

buď a) $x+1 > 0$, pak $-(x+1) < y \leqq x+1$,

nebo b) $x+1 < 0$, pak $-(x+1) > y \geqq x+1$;

Tedy, označíme-li

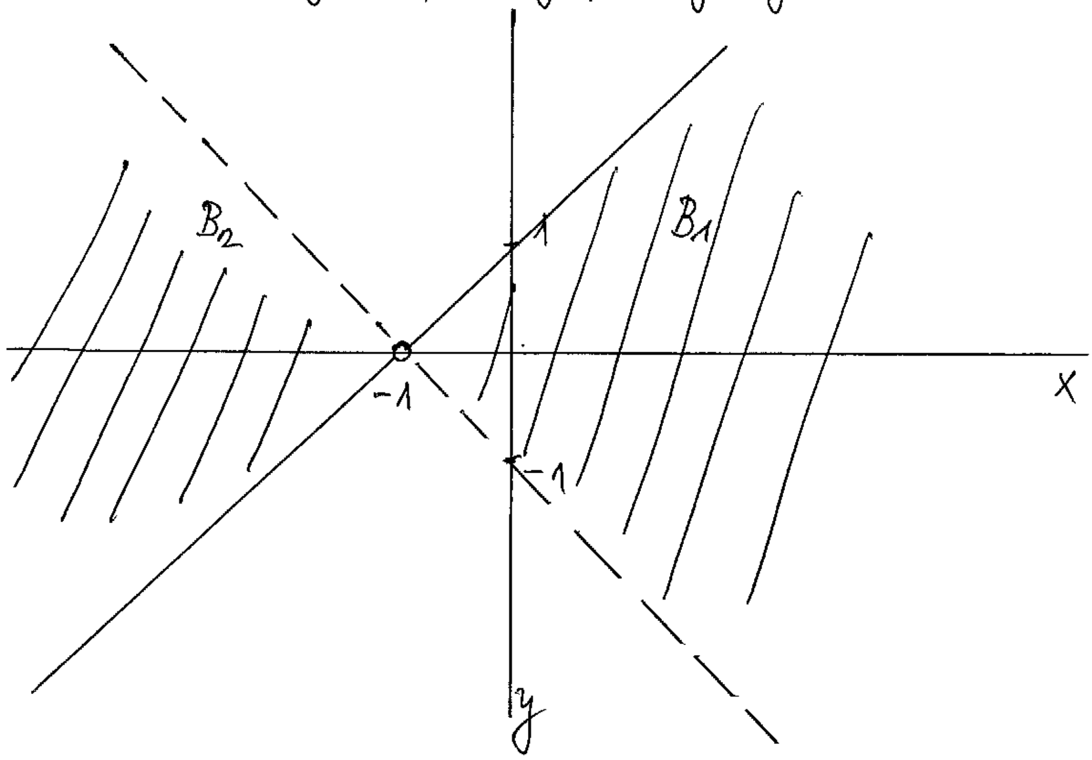
$$B_1 = \{ [x,y] \in R^2 ;\ x > -1 \ \wedge\ -(x+1) < y \leqq x+1 \} \quad a$$

$$B_2 = \{ [x,y] \in R^2 ;\ x < -1 \ \wedge\ -(x+1) > y \geqq x+1 \},$$

pak, je-li $X\,[x,y] \in M_2$, pak buď $X \in B_1$ nebo $X \in B_2$, tedy

$$\underline{M_2 = B_1 \cup B_2}$$

a náčrtek (snad je více „vidět") – načrtneme přímky o rovnicích $y = x+1$ a $y = -x-1$, "vynecháme" bod $[-1,0]$ (neboť $x \neq -1$), přičemž body přímky $y = x+1$ (až na bod $[-1,0]$) jsou body M_2, body přímky $y = -x-1$ ale neleží v M_2;



c) $\underline{M_3 = \{ [x,y] ;\ x^2+y^2 \leqq 4 \ \wedge\ x+y \geqq 0 \}}$;

je-li bod $X \in M_3$, $X\,[x,y]$ (kartézské souřadnice), pak

platí (1) $x^2+y^2 \leqq 4$

a současně (2) $x+y \geqq 0 \iff y > -x$;

označíme-li

(1) $\underline{C_1 = \{[x,y] \in R^2;\ x^2+y^2 \leqq 4\}}$,

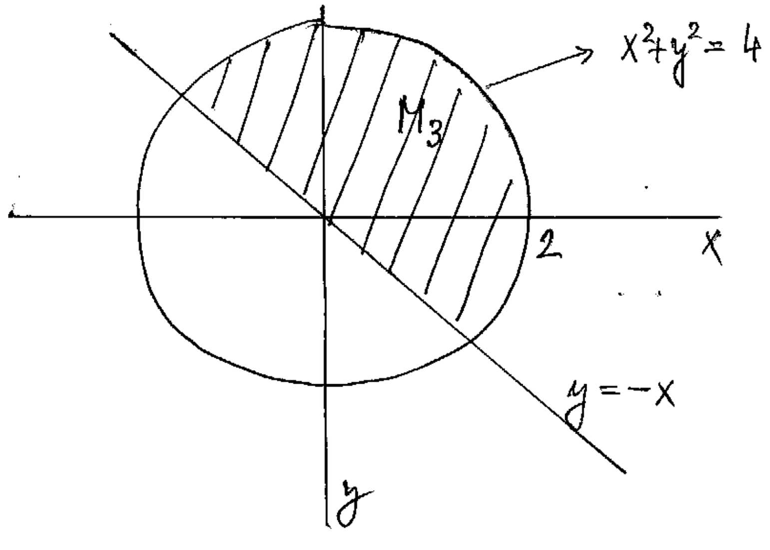
pak C_1 je kruh o středu v počátku a poloměru $R=2$, do C_1 patří i kružnice o rovnici $x^2+y^2=4$ (neboť nerovnost je zde neostrá, $x^2+y^2 \leqq 4$) – raději připomeneme: vzdálenost bodu $X[x,y]$ od bodu $O[0,0]$ označme $d_2(x,y)$, pak $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, a tedy kruh o středu v bodě O a poloměru $R=2$, včetně kružnice, je množina bodů v rovině, pro které je $d_2(x,y) \leqq 2$, tj. $\sqrt{x^2+y^2} \leqq 2$, neboli (vyjádří se „bez" odmocniny), kruh o poloměru $R=2$ a středu v počátku je množina bodů, pro jejichž kartézské souřadnice platí: $x^2+y^2 \leq 4$.

a je-li

(2) $\underline{C_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y \geqq -x\}}$,

pak body z C_2 jsou buď body přímky o rovnici $y=-x$, nebo (pro $y>-x$) leží v rovině „nad" touto přímkou;

a pak $\underline{M_3 = C_1 \cap C_2}$, a načrtek:



U každé z daných množin rozhodněte (a odůvodněte), zda je to množina otevřená, uzavřená, omezená, nebo třeba kompaktní. Popište hranice těchto množin.

Nejprve připomeneme definice speciálních „druhů" množin, uvedených v zadání úlohy:

K definicím vlastností množin v R^2 (obecně v R^n), které máte „prozkoumat" u daných množin, je třeba definovat (tj. „zavést") v R^2, R^3 (obecně v R^n) vzdálenost bodů, a pomocí vzdálenosti pak okolí bodu, vzdálenost v $R^2(R^n)$ pak nám též umožní v $R^2(R^3, R^n)$ konvergovat.

(1) Vzdálenost bodů v R^2 (R^3, R^n):

v $R^2(R^3$, i v $R^n)$ budeme pracovat s tzv. Euklidovskou vzdáleností: jsou-li dány body $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, pak vzdálenost $d_2(A,B)$ je definována jako délka úsečky $\overline{AB}$, tj.

$$d_2(A,B) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2} \;;$$

analogicky, v R^3 je $d_3(A,B)$ též délka úsečky $\overline{AB}$, tj.

$$d_3(A,B) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2} \;,$$

a obecně v R^n $(A[a_1, a_2, .., a_n], B[b_1, b_2, .. b_n])$ je

$$d_n(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

(2) Okolí bodu A v R^n (spec. v R^2, R^3):

je-li $A \in R^n$ (R^2, R^3), $\delta > 0$, pak obyčejné okolí bodu A o poloměru $\delta > 0$ je

$$\mathcal{U}(A,\delta) = \{ X \in R^n ;\ d_n(X,A) < \delta \} \;;$$

prstencové okolí bodu A a poloměru δ – $\mathcal{O}(a,\delta)$ je:

$$\mathcal{O}(a,\delta) = \{ X \in R^n ;\ 0 < d_n(X,A) < \delta \}$$

(tj. $\mathcal{O}(A,\delta) = \mathcal{U}(A,\delta) \setminus \{A\}$) ;

speciálně v R^2 je $\mathcal{U}(a,\delta)$ kruh o středu A a poloměru $\delta > 0$ (bez kružnice, odtud také obecně se $\delta > 0$ nazývá poloměr okolí) a $\mathcal{O}(A,\delta)$ je kruh o středu A a poloměru $\delta > 0$, ale bez středu A ;

a v R^3 – $\mathcal{U}(A,\delta)$ je koule o středu v bodě A a poloměru $\delta > 0$, bez „povrchu", tj. bez kulové plochy o poloměru δ, a $\mathcal{O}(a,\delta)$ je (opět analogicky) „kulička" o středu v A a poloměru $\delta > 0$, ale bez středu A.

A charakteristika bodů množin v $R^2(R^3, R^n)$:

1. Bod $X \in M$, $M \subset R^2(R^3, R^n)$ je vnitřní bod množiny M, tedy existuje „nějaké" okolí $\mathcal{U}(X,\delta) \subset M$. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá vnitřek množiny M a značí (obvykle) M^0;

2. Je-li $M \neq \emptyset$, $M \subset R^2(R^3, R^n)$, pak $X \in R^2(R^3, R^n)$ je hraničním bodem množiny M, když v každém okolí bodu X leží bod z M i z doplňku M (v R^n), tj. z $R^2 \setminus M$ ($R^n \setminus M$), tj. platí: $\forall\, \mathcal{U}(X,\delta) : \mathcal{U}(X,\delta) \cap M \neq \emptyset \wedge \mathcal{U}(X,\delta) \cap (R^n \setminus M) \neq \emptyset$; je-li X hraničním bodem M, může ležet v M, ale nemusí; množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá hranice M a značí (obvykle) ∂M.

3. Je-li $M \neq \emptyset$, $M \subset R^2 (R^3, R^n)$, pak bod $X \in R^2 (R^3, R^n)$ se nazývá <u>hromadný bod množiny M</u> (nebo často limitní bod M), když v každém prstencovém okolí bodu X leží bod z M, tj. platí:

$$\forall\, P(X, \delta) : \quad P(X, \delta) \cap M \neq \emptyset .$$

A odtud je snad „vidět", že platí:

$$\underline{X \text{ je hromadný bod } M} \iff \exists \{X_m\}_{m=1}^{\infty},\ X_m \in M : \quad \underline{\lim_{m \to \infty} X_m = X}$$

(proto „limitní" bod) $\quad$ (tj. $d_n(X_m, X) \to 0$ pro $m \to \infty$)

Množinu všech hromadných bodů množiny M budeme značit M'.

<u>A charakteristika některých důležitých „druhů" množin:</u>

1. <u>$M \subset R^2 (R^3, R^n)$ je množina otevřená</u>, když každý bod $X \in M$ „má" své okolí (obyčejné), které je „celé" v M, tj. $\forall X \in M \ \exists\, U(X, \delta) : \ U(X, \delta) \subset M$.

(Tedy, každý bod otevřené množiny je jejím vnitřním bodem, a tedy $M = M^0$. Dále, žádný bod hraniční není v M, tj. $\partial M \cap M \neq \emptyset$)

2. <u>$M \subset R^2 (R^3, R^n)$ je množina uzavřená</u>, když všechny hromadné body množiny M leží v M, tj. $M' \subset M$.
(M je „uzavřená" vzhledem k limitě posloupnosti bodů z M).

Ekvivalentně: M je uzavřená $\Leftrightarrow \partial M \subset M$, nebo
$M \subset R^n$, M je uzavřená $\Leftrightarrow R^n \setminus M$ je množina otevřená ($n = 2, 3, \dots$)

3. $M \subset R^2 (R^3, R^n)$ je množina omezená, existuje-li $c > 0$ tak, že $M \subset \mathcal{U}(0; c)$
(tedy body z M mají shora omezenou vzdálenost od počátku)

4. $M \subset R^2 (R^3, R^n)$ je množina kompaktní, když je omezená a uzavřená (analogie v R – kompaktní interval $\langle a, b \rangle$, $a < b$)

A nyní – zkusme „odhalit" vlastnosti množin z příkladu 1:

a) $M_1 = \{[x, y]; -2 < x^2 - y < 3\}$:

nejlépe to asi „vidíme" z náčrtku (ale snad i ze zadání):
M_1 je množina otevřená – ke každému bodu $X \in M_1$ lze najít okolí, které je částí M_1, též – hranice M_1, tj.
$\partial M_1 = \{[x, y] \in R^2; y = x^2 + 2\} \cup \{[x, y] \in R^2; y = x^2 - 3\}$
neleží v M_1 ($\partial M_1 \cap M_1 = \emptyset$)

b) $M_2 = \{[x, y]; -1 < \frac{y}{x+1} \leq 1\}$ není ani otevřená, ani uzavřená množina, neboť hranice ∂M_2 je
$\partial M_2 = \{[x, y]; y = x + 1, x \in R\} \cup \{[x, y]; y = -x - 1, x \in R\}$
a část hranice $\{[x, y]; y = x + 1, x \neq -1\} \subset M_2$, tedy M_2 není otevřená, ale „druhá" část hranice, tj.

množina $\{[x,y];\ y=-x-1\}$, má s M_2 prázdný průnik, tedy M_2 není uzavřená (to by muselo být $\partial M_2 \subset M_2$).
M_2 není ani omezená, neboť je $[x,0] \in M_2$ pro x lib. velké.

c) $\underline{M_3 = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leq 4 \ \wedge\ x+y \geqq 0\}}$:

zde, $\underline{\partial M_3} = \{[x,y];\ x^2+y^2=4;\ y \geqq -x\}\ \cup$

$$\cup\ \{[x,y];\ y=-x;\ x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle\}$$

a vidíme, že $\partial M_3 \subset M_3$, tedy M_3 je množina uzavřená.
Dále, M_3 je množina omezená – $M_3 \subset \mathcal{U}(0,3)$ například.
<u>Tedy, M_3 je množina kompaktní</u> (je uzavřená a omezená).

2. Najděte a v rovině (s k.s.s.) načrtněte definiční obor funkce

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2-2y+1}$;

b) $f(x,y)=\sqrt{y\ln x}$

c) $f(x,y)=\ln(xy)$ nebo $f(x,y)=\ln(xy-1)$.

Řešení:

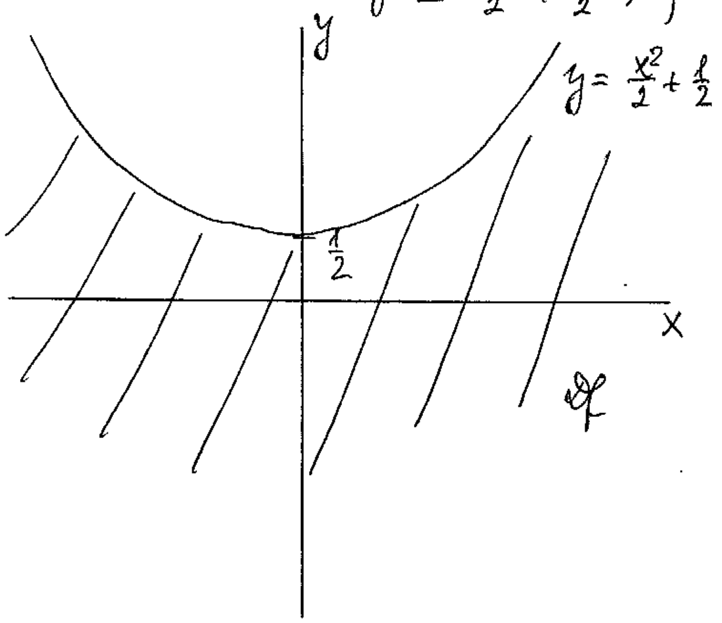
a) $f(x,y)=\sqrt{x^2-2y+1}$, pak

$D_f=\{[x,y];\ x^2-2y+1\geqq 0\}$;

$$x^2-2y+1\geqq 0 \iff 2y\leqq x^2+1 \iff y\leqq \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ ,\quad x\in R$$

a náčrtek D_f: (teď už můžeme užít náš „slovník")

hranice D_f (tj. ∂D_f) je parabola o rovnici $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$, $x\in R$, a body z D_f leží buď na této parabole nebo „pod ní" (neboť $y\leqq \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$) ;



Navíc už víme, že D_f je množina uzavřená (neboť $\partial D_f\subset D_f$), též je „vidět", že $R^2\setminus D_f$ je množina otevřená; D_f není množina omezená.

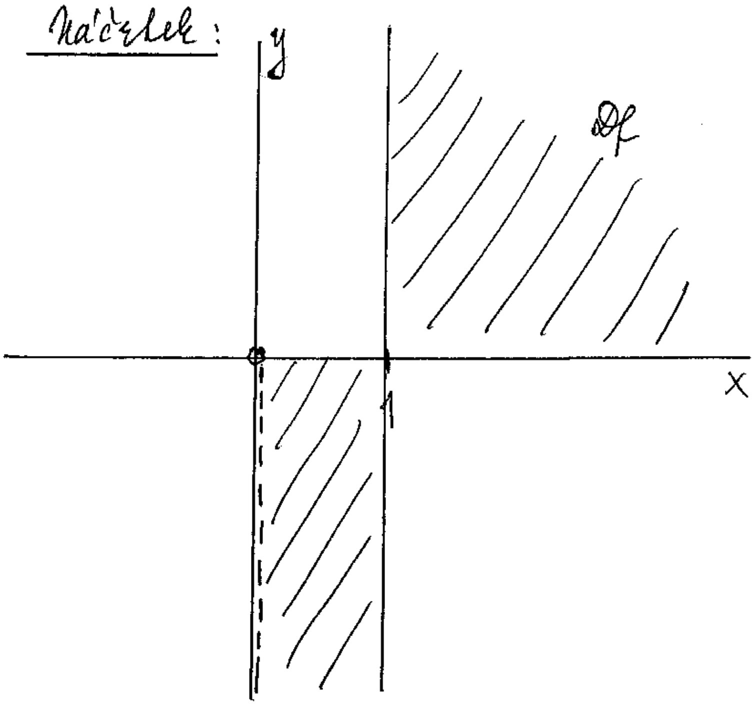
b) $f(x,y)=\sqrt{y.\ln x}$, pak

$$D_f=\{[x,y]\in R^2;\ y.\ln x\geqq 0\}=$$

$$=\{[x,y]\in R^2;\ (\ln x\geqq 0\wedge y\geqq 0)\vee(\ln x\leqq 0\wedge y\leqq 0)\}=$$

$$=\{[x,y]\in R^2;\ x\geqq 1\wedge y\geqq 0\}\cup\{[x,y]\in R^2;\ 0<x\leqq 1\wedge y\leqq 0\}.$$

Náčrtek:

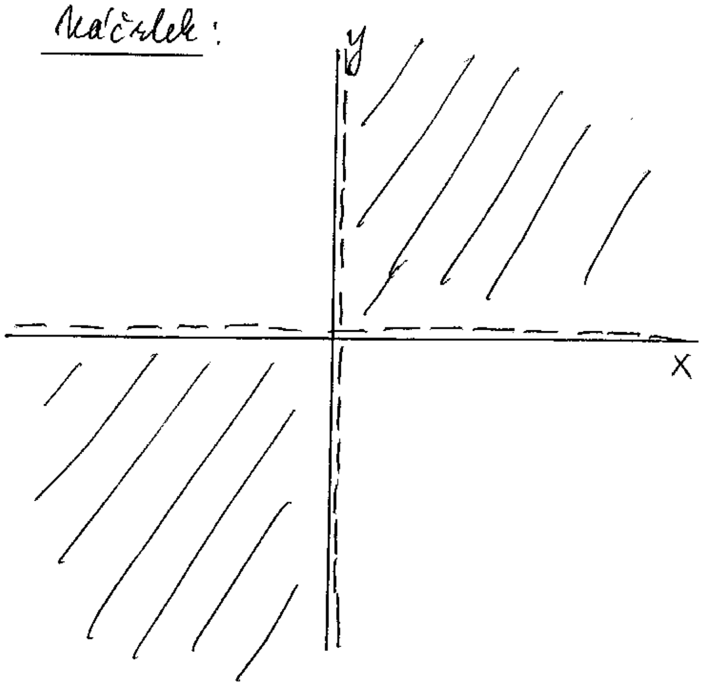


Df není množina uzavřená, neboť „část" hranice – záporná poloosa y – neleží v Df, ale Df není ani množina otevřená – neboť „část" hranice $\{[x,0],\ x>0\} \cup \{[1,y],\ y\in R\}$ je podmnožinou Df.

c) $f(x,y) = \ln(xy)$, pak

$$Df = \{[x,y]\in R^2;\ x\cdot y>0\} =$$
$$= \{[x,y]\in R^2;\ x>0 \wedge y>0\} \cup \{[x,y];\ x<0 \wedge y<0\}$$

Náčrtek:



Df je množina otevřená, je vidět, že ke každému bodu z Df lze najít okolí, které leží v Df (nebude mít toto okolí „nic společného" s osami x, y; nebo také, průnik hranice Df (kterou tvoří osy x, y) s Df je prázdný.

II. Limita a spojitost funkce:

1. Je dána funkce

a) $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$ (zde $\exp(x) = e^x$);

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

c) $f(x,y) = \ln(y - x^2)$.

Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru .
Zkuste si představit graf funkce f u funkcí v a) a b).

2. Vyšetřete spojitost funkcí z příkladu 2. v jejich definičních oborech.

Pro řešení zadaných příkladů potřebujeme opět rozumět základním pojmům, vše, co potřebujeme, najdete podrobněji (a doufám, že snad i „čitelně" v přednášce MA2 z 23.3. 2020. Zde jen stručně:

Uvažujme reálnou funkci n-proměnných (pro nás opět důležité hlavně $n = 2, 3$), tj. $f: M \subset R^n \, (R^2, R^3) \to R$:

<u>Spojitost funkce f v bodě $X_0 \in Df$:</u>

(definice je analogická k definici spojitosti funkce jedné proměnné)

(i) je-li X_0 vnitřní bod Df (tj. je-li f definovaná v okolí $U(X_0, \delta), \delta > 0$), pak f je spojitá v bodě X_0, když platí:

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$$

(ii) je-li X_0 hromadným bodem Df, $X_0 \in Df$, ale X_0 není vnitřním bodem Df, pak f je spojitá v bodě X_0, když platí

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in Df}} f(X) = f(X_0)$$

(této limitě se říká limita vzhledem k množině $Df = M$)

(iii) f je spojitá v množině $M \subset Df$ (také lze $M = Df$), když je spojitá v každém bodě $X \in M$.

a tedy zde je třeba znát „i co znamená" pojem limita funkce n proměnných v bodě X_0, tj. $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = L \in R$:

intuitivně: když body X se blíží k bodu X_0 (tedy asi je třeba, aby $X \in (\mathcal{D}f)'$ (tj. hromadný bod $\mathcal{D}f$), pak hodnoty $f(X)$ se blíží k $L \in R$ (asi bude jasné i $L = \pm\infty$)

k přesné formulaci „blížení se" – použijeme vzdálenost:

Definice: (i) $M \subset \mathcal{D}f$, $X_0 \in M^0$, pak

$\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = L \in R$, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall X : 0 < d_n(X, X_0) < \delta \Rightarrow |f(X) - L| < \varepsilon,$$

nebo, pomocí okolí:

$$\forall\, \mathcal{U}(L, \varepsilon)\ \exists\, \mathcal{P}(X_0, \delta) : f(\mathcal{P}(X_0, \delta)) \subset \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

(ii) nebo obecněji – limita $f(X)$ v bodě X_0 vzhledem k množině M;

$X_0 \in M'$ (tj. X_0 je hromadný bod M):

$\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in M}} f(X) = L$, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall X \in M;\quad 0 < d_n(X, X_0) < \delta \Rightarrow |f(X) - L| < \varepsilon$$

nebo

$$\forall\, \mathcal{U}(L, \varepsilon)\ \exists\, \mathcal{P}(X_0, \delta) : \underline{f(\mathcal{P}(X_0, \delta) \cap M)} \subset \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

a pro výpočet limity $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$ je užitečné „rozumět" tomu, co „znamená" $X \to X_0$ (spec. $X \to X_0$, $X \in M$):

je-li $X=[x_1,x_2,\dots,x_n]$, $X_0=[x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0]$, pak zřejmě

$$X\to X_0 \iff x_i\to x_i^0 \text{ pro } i=1,2\dots n,$$

neboť $X\to X_0$ „znamená", že $d_n(X,X_0)\to 0$,

tj. $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}\to 0$, ale toto je „ekvivalentní"

tomu, že $|x_i-x_i^0|\to 0$.

A dále, protože vlastnosti vzdálenosti (metriky, jak se říká) v R^n jsou „stejné" jako v R, zřejmě platí věty o aritmetice limit i věta o limitě složené funkce $f(X)=g(h(X))$, kde h je funkce obecně n proměnných a g funkce jedné proměnné. (obecněji – později probereme též) – opět je „vše" v přednášce MA2 z 23.3, podrobněji.

Příklad:

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+y^2)$: když $(x,y)\to(1,2)$, tak ekvivalentně $x\to 1$, $y\to 2$, a pak

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+y^2)=1^2+2^2=5$$

(limita součtu a dále limity fcí x^2, y^2)

nebo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\overset{(*)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1 \; -$$

neboť $(x,y)\to(0,0)\iff x\to 0$ a $y\to 0$, pak $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2+y^2=0$, a tedy dle věty o limitě složené funkce je $(*)$.

$(x^2+y^2\neq 0$ v $\mathcal{P}(0,0))$

a řešení zadaných příkladů:

1. a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$:

$D_f = R^2$ – f je složená funkce, kde vnější funkce $g(t) = e^t$ a vnitřní fce je $h(x,y) = -(x^2+y^2)$, vnější i vnitřní funkce jsou fce spojité v R, resp. v R^2

(nebo též dle definice:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{t\to(x_0^2+y_0^2)} e^{-t} = e^{-(x_0^2+y_0^2)} \quad \text{(cbd.)}$$
)

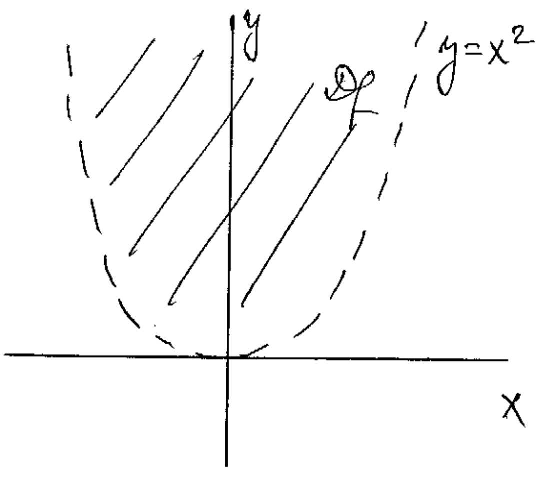
b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$:

$D_f = R^2 \setminus \{0,0\}$, a opět je zřejmé, že f je spojitá v D_f (D_f je otevřená množina) – spojitost podílu funkcí

c) $f(x,y) = \ln(y - x^2)$

$D_f = \{[x,y];\ y - x^2 > 0\} = \{[x,y];\ y > x^2\}$

a (uměme) náčrtek D_f: $\partial D_f = \{[x,y];\ y = x^2\}$, D_f je množina otevřená, funkce vnitřní $h(x,y) = y - x^2$ je spojitá v D_f, zobrazuje D_f na interval $(0,+\infty)$, a vnější funkce $h(t) = \ln t$ je zde též spojitá – tedy složená funkce $f(x,y)$ je spojitá v D_f.



2. Spojitost funkcí z příkladu I/2:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2-2y+1}$:

už víme, že $\mathcal{D}f = \{ [x,y] \in R^2;\ y \leqq \frac{1+x^2}{2} \}$, a pak tedy
$\mathcal{D}f^0 = \{ [x,y];\ y < \frac{1+x^2}{2} \}$ a hranice $\mathcal{D}f$ je $\partial\mathcal{D}f = \{ [x,y];\ y = \frac{1+x^2}{2},\ x \in R \}$

Ve všech bodech vnitřních z $\mathcal{D}f$, tj. v $\mathcal{D}f^0$, je tato fce zřejmě spojitá (opět spojitost fce složené z vnější $g(t)=\sqrt{t}$, spojité v $(0,+\infty)$ a vnitřní fce dvou proměnných $h(x,y) = x^2-2y+1$; body hranice jsou hromadné body množiny $\mathcal{D}f$, a podobně, funkce $f(x,y)$ je v bodech hranice spojitá vzhledem k $\mathcal{D}f$, tj. f je spojitá v $\mathcal{D}f$.

b) $f(x,y) = \sqrt{y \ln x}$:

opět, z předchozích příkladů v I/2 víme, že
$\mathcal{D}f = \{ [x,y];\ x \geqq 1 \wedge y \geqq 0 \} \cup \{ [x,y];\ 0 < x \leqq 1 \wedge y \leqq 0 \}$;
opět je zřejmé, že f je spojitá v $\mathcal{D}f^0$ (spojitost složené funkce) a v hraničních bodech $\mathcal{D}f$, které jsou body i $\mathcal{D}f$ (a jsou to hromadné body $\mathcal{D}f$) je f spojitá vzhledem k $\mathcal{D}f$.

c) $f(x,y) = \ln(xy)$:

zde $\mathcal{D}f = \{ [x,y] \in R^2;\ (x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0) \}$ je množina otevřená, a opět, dle „spojitosti složené funkce", je $f(x,y)$ spojitá v každém bodě z $\mathcal{D}f$, tj. je spojitá v $\mathcal{D}f$.
Stejně tak i funkce $f(x,y) = \ln(xy-1)$ je spojitá v $\mathcal{D}f = \{ [x,y];\ xy-1>0 \}$ ($\mathcal{D}f$ je i zde otevřená množina)